

Alina Przychoda, Zygmunt Łaszczyk

Matematyka

Program nauczania dla liceum i technikum



ZAKRES PODSTAWOWY I ROZSZERZONY

Projekt serii okładek
Krzysztof Kielbasiński

Projekt okładki i strony tytułowej
Jadwiga Abramowicz, Krzysztof Płuciennik

Redaktor inicjujący
Marzena Korycka

Redaktor merytoryczny
Krystyna Rugień

Redaktor techniczny
Janina Soboń

Program nauczania dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu programów nauczania matematyki na poziomie IV etapu kształcenia w zakresie podstawowym i rozszerzonym na podstawie opinii rzeczoznawców:
dr Marii Borowskiej – rekomendacja: Katolicki Uniwersytet Lubelski
mgr. Marka Sadowskiego – rekomendacja: Minister Edukacji Narodowej

Numer dopuszczenia: DKOW-5002-06/08

© Copyright by Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne Spółka Akcyjna
Warszawa 2008

Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne Spółka Akcyjna
02-305 Warszawa, Aleje Jerozolimskie 136
Adres do korespondencji: 00-965 Warszawa, p. poczt. nr 9
www.wsip.pl
Wydanie pierwsze
Ark. druk. 3
Skład i łamanie: Maria Dylewska WSiP S.A.
Druk i oprawa: Zakład Poligraficzno-Wydawniczy POZKAL, Inowrocław
Wydrukowano na papierze offsetowym Speed-E produkcji International Paper

Spis treści

1. **Wstęp** / 4
2. **Podstawa programowa matematyki dla liceum i technikum** / 5
3. **Szczegółowe cele edukacyjne** / 8
 - 3.1. Cele kształcenia / 8
 - 3.2. Cele wychowania / 8
4. **Treści nauczania matematyki oraz opis założonych osiągnięć** / 9
5. **Procedury osiągania szczegółowych celów edukacyjnych** / 17
 - 5.1. Propozycja metod pracy z uczniami / 17
 - 5.2. Propozycja metod kontroli i oceny osiągnięć uczniów / 18
6. **Uwagi ogólne o realizacji programu** / 20
 - 6.1. Przykładowy przydział godzin dla 3-letniego liceum / 21
 - 6.2. Przykładowy przydział godzin dla 4-letniego technikum / 22
7. **Bibliografia** / 23

1. Wstęp

Program nauczania matematyki w zakresie podstawowym i rozszerzonym przeznaczony jest dla liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego oraz technikum. Został opracowany w oparciu o cele, zadania, treści kształcenia i osiągnięcia zawarte w podstawie programowej – **DzU Nr 157, poz. 1100** oraz standardy wymagań egzaminacyjnych – **DzU Nr 157, poz. 1102**. Świadomi wymagań jakie przyniesie obowiązkowy egzamin maturalny z matematyki w roku 2010, zawarliśmy w nim głównie hasła zawarte w nowej podstawie programowej, która zawężyła treści matematyczne. Zostawiono tę samą siatkę godzin. Jesteśmy zatem zobowiązani, głębiej niż dotychczas, realizować treści nauczania z nowej podstawy.

Po zakończeniu kształcenia w zakresie **podstawowym** uczniowie powinni być wyposażeni w wiedzę, która jest przystępna, niezbędna do dalszej edukacji i o dużej użyteczności pozaszkolnej. Ich umiejętności powinny być ukierunkowane na przetwarzanie wiedzy matematycznej i wykorzystywanie jej jako narzędzia do rozwiązywania problemów. Modelowanie matematyczne powinniśmy ćwiczyć, rozwiązując problemy spoza matematyki. Jesteśmy zwolennikami stosowania technologii informacyjnej. Wszędzie tam, gdzie istnieje możliwość zastosowania komputerów lub kalkulatorów do modelowania i wizualizacji zyskujemy czas na rozwiązywanie ciekawych problemów, dyskusje i rozmowę z uczniem.

Na poziomie kształcenia w zakresie **rozszerzonym** uważamy, że większą troską powinniśmy obejmować ćwiczenie takich umiejętności jak: poprawność językowa, argumentowanie i dowodzenie, rozwiązywanie problemów abstrakcyjnych, czysto matematycznych.

W programie nauczania zwracamy uwagę na rozwijanie technik rozumowania naukowego, które będzie u ucznia kształtowało:

- umiejętność stawiania pytań i dochodzenia do wniosków, a nie jedynie wyuczenie lub powtarzanie podanych argumentów,
- pogląd, że równie ważnym jest samo odkrywanie, jak i odkrycie naukowe,
- rozumienie pojęcia procesu, zjawiska i odróżnienie go od szczegółowych informacji,
- umiejętność rozróżniania informacji naukowych od nienaukowych,
- dokonywanie krytycznej oceny uzyskiwanych wyników,
- rozróżnianie opinii od faktów.

Dobór metod i form organizowania procesu dydaktycznego nauczyciel uzależnia od uczniów, z którymi pracuje, od ich możliwości intelektualnych, stopnia mobilizacji do nauki matematyki, liczebności zespołu, wyposażenia sal lekcyjnych itp.

Chcemy zaproponować nauczycielowi ofertę, która ułatwi mu pracę zarówno z uczniem słabym, jak i uczniem zdolnym, pragnącym pogłębiać wiedzę matematyczną.

Do programu nauczania dostosowany będzie komplet podręczników dla klas 1, 2, 3, w których wyróżnione zostaną treści nauczania dla kształcenia rozszerzonego.

Pakiet dla szkół ponadgimnazjalnych będzie składał się z podręczników, poradników wydanych w formie wkładów do segregatora, płyt CD-ROM dla nauczyciela, zbioru zadań dla klas 1-3 oraz materiałów, które będą ukazywały się systematycznie w Klubie Nauczyciela.

2. Podstawa programowa matematyki dla liceum i technikum

Cele edukacyjne

1. Przygotowanie do świadomego i pełnowartościowego uczestnictwa w świecie, w którym modele matematyczne odgrywają kluczową rolę.
2. Przyswojenie podstawowych struktur matematycznych w stopniu umożliwiającym rozpoznawanie ich przydatności i wykorzystanie w sytuacjach praktycznych, w szczególności:
 - 1) usystematyzowanie wiedzy o liczbach rzeczywistych oraz nabycie sprawności wykonywania obliczeń,
 - 2) opanowanie reguł rachunku algebraicznego,
 - 3) wdrożenie do opisywania oraz analizy zależności i zmienności za pomocą elementarnych funkcji,
 - 4) poznanie struktury otaczającej nas przestrzeni poprzez własności klasycznych obiektów geometrycznych; rozwój wyobraźni przestrzennej,
 - 5) poznanie elementarnych metod analizy zjawisk statystycznych i losowych oraz ich najprostszymi opisów kombinatorycznych.
3. Przyzwyczajenie do typowych elementów rozumowań matematycznych, w szczególności do stosowania takich pojęć jak założenie, wniosek, dowód (także nie wprost), przykład i kontrprzykład.
4. WYROBIENIE UMIEJĘTNOŚCI I POTRZEBY KRYTYCZNEJ OCENY PRZEPROWADZONEGO RZUMOWANIA BĄDŹ OTRZYMANEGO WYNIKU OBLICZEŃ.
5. WYROBIENIE NAWYKU SAMODZIELNEGO ZDOBYWANIA, ANALIZOWANIA I KLASYFIKOWANIA INFORMACJI; STAWIANIA HIPOTEZ I POSZUKIWANIA METOD ICH WERYFIKACJI.
6. Kształtowanie umiejętności jasnego i precyzyjnego formułowania wypowiedzi oraz argumentowania.

Zadania szkoły

1. Zapewnienie kształcenia promującego samodzielne, krytyczne i twórcze myślenie; ograniczenie do minimum działań schematycznych i odtwórczych.

2. Zapewnienie każdemu uczniowi warunków do rozwoju zdolności na miarę jego możliwości poznawczych.
3. Przygotowanie uczniów do samodzielnego zdobywania wiedzy na dalszych etapach edukacji oraz w pracy zawodowej.
4. Wdrożenie uczniów do korzystania z nowoczesnych narzędzi (kalkulatory, komputery, multimedia) i źródeł informacji (podręczniki, słowniki, atlasy, encyklopedie, zasoby sieciowe).

Uwaga: Treści nauczania do kształcenia w zakresie rozszerzonym są zaznaczone pogrubioną czcionką.

Treści nauczania

1. Liczby rzeczywiste
 - 1) liczby naturalne i całkowite; **twierdzenie o rozkładzie liczby naturalnej na czynniki pierwsze**,
 - 2) liczby wymierne; rozwinięcia dziesiętne,
 - 3) liczby niewymierne,
 - 4) oś liczbowa; przedziały osi liczbowej,
 - 5) wartość bezwzględna,
 - 6) procenty i punkty procentowe; lokaty i kredyty,
 - 7) błąd przybliżenia; szacowanie wartości liczbowych,
 - 8) pierwiastki (w tym pierwiastki nieparzystego stopnia z liczb ujemnych),
 - 9) **twierdzenie o niewymierności pierwiastka kwadratowego z liczby 2**,
 - 10) potęgi liczb nieujemnych o wykładniku wymiernym i ich własności; informacja o własnościach potęg o wykładniku rzeczywistym,
 - 11) logarytmy; podstawowe własności logarytmów.
2. Wyrażenia algebraiczne
 - 1) wzory skróconego mnożenia, w tym $(a - b)^2$; $a^3 - b^3$; $(a + b)^2$; $a^3 + b^3$.
Wzór $(a - 1)(1 + a + \dots + a^{n-1}) = a^n - 1$,
 - 2) wielomiany; dodawanie, odejmowanie i mnożenie wielomianów,
 - 3) **dzielenie wielomianów z resztą przez dwumian $x - a$; twierdzenie o reszcie**,
 - 4) wyrażenia wymierne,
 - 5) dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych.

3. Równania i nierówności
 - 1) równania i nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą,
 - 2) **układy równań prowadzące do równań kwadratowych,**
 - 3) **wzory Viete'a,**
 - 4) **równania i nierówności kwadratowe z parametrem,**
 - 5) proste równania wielomianowe; **proste nierówności wielomianowe,**
 - 6) **twierdzenie o postaci wymiernych pierwiastków wielomianu o współczynnikach całkowitych,**
 - 7) proste równania wymierne; proste **nierówności wymierne,**
 - 8) **proste równania i nierówności z wartością bezwzględną typu**
 $|ax - b| = c, |ax - b| > c.$
4. Funkcje
 - 1) różne sposoby określania funkcji,
 - 2) odczytywanie własności funkcji z wykresu,
 - 3) proste przekształcenia wykresów funkcji liczbowych,
 - 4) funkcja liniowa,
 - 5) funkcja kwadratowa,
 - 6) funkcja $f(x) = \frac{a}{x},$
 - 7) funkcja wykładnicza,
 - 8) **funkcja logarytmiczna.**
5. Ciągi
 - 1) przykłady ciągów,
 - 2) ciąg arytmetyczny,
 - 3) ciąg geometryczny.
6. Trygonometria
 - 1) funkcje sinus, cosinus i tangens kąta ostrego,
 - 2) proste związki między funkcjami trygonometrycznymi,
 - 3) **miara łukowa kąta; funkcje trygonometryczne argumentu rzeczywistego,**
 - 4) **proste równania i nierówności trygonometryczne.**
7. Planimetria
 - 1) kąty w okręgu,
 - 2) **czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu,**
 - 3) figury podobne; **figury jednokładne; twierdzenie o związkach miarowych między odcinkami stycznych i siecznych,**
 - 4) **twierdzenie sinusów; twierdzenie cosinusów,**
 - 5) zastosowania trygonometrii w planimetrii.
8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej
 - 1) równanie prostej na płaszczyźnie,
 - 2) interpretacja geometryczna układu równań liniowych,
 - 3) **interpretacja geometryczna układu nierówności liniowych,**
 - 4) odległość punktów w układzie współrzędnych, równanie okręgu, opis koła za pomocą nierówności,
 - 5) **punkty wspólne prostych i okręgów,**
 - 6) **wektory na płaszczyźnie kartezjańskiej,**
 - 7) **dodawanie wektorów:**
 $[a_1, a_2] + [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$
i mnożenie wektora przez liczbę
 $t[a_1, a_2] = [ta_1, ta_2].$
Interpretacja geometryczna działań na wektorach.
9. Stereometria
 - 1) równoległość i prostopadłość w przestrzeni, **rzut prostokątny na płaszczyznę, twierdzenie o trzech prostych prostopadłych,**
 - 2) kąt między prostą i płaszczyzną, kąt dwuścienny,
 - 3) **wyznaczanie przekrojów znanych brył,**
 - 4) zastosowania trygonometrii w stereometrii.
10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka
 - 1) średnia arytmetyczna, średnia ważona, mediana, odchylenie standardowe,
 - 2) zliczanie przypadków w prostych sytuacjach kombinatorycznych, zasada mnożenia,
 - 3) **permutacje, kombinacje, wariacje,**
 - 4) obliczanie prawdopodobieństwa w przypadku skończonej liczby zdarzeń elementarnych.

Osiągnięcia

1. Umiejętność budowania modeli matematycznych zjawisk z różnych dziedzin życia i ich stosowania:
 - 1) opisywanie związków pomiędzy wielkościami liczbowymi za pomocą równań i nierówności,
 - 2) wyznaczanie zależności funkcyjnych między wielkościami liczbowymi,

2. Podstawa programowa matematyki dla liceum i technikum

- 3) wyznaczanie związków metrycznych i miarowych w otaczającej przestrzeni,
 - 4) budowanie modeli zjawisk losowych.
2. Umiejętność wykorzystania podstawowych narzędzi i technik matematycznych:
- 1) przeprowadzenie obliczeń dokładnych i przybliżonych (w tym procentowych), także z wykorzystaniem kalkulatora,
 - 2) opisywanie zbiorów za pomocą równań, nierówności i ich układów,
 - 3) rozwiązywanie pewnych typów równań oraz ich układów,
 - 4) sporządzanie wykresów funkcji oraz odczytywanie własności z wykresu,
 - 5) wyznaczanie związków miarowych dla figur płaskich i brył,
 - 6) obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń.
3. Umiejętność przeprowadzenia prostego rozumowania dedukcyjnego.
4. Umiejętność zdobywania i krytycznego analizowania informacji, formułowania hipotez oraz ich weryfikacji.

3. Szczegółowe cele edukacyjne

Matematyka obok języka polskiego i języków obcych staje się znów przedmiotem wiodącym w szkole ponadgimnazjalnej. Niektórzy dydaktycy uważają, że matematyka jest trzecim językiem, którym uczeń uczy się posługiwać. Dużą rangę nauczania matematyki, a szczególnie wynikowi egzaminu maturalnego, przypisują wyższe uczelnie. Coraz częściej matematyka wskazywana jest jako przedmiot, z którego wynik egzaminu maturalnego uwzględniany jest podczas rekrutacji wstępnej na wielu kierunkach – ostatnio również na kierunkach humanistycznych (prawo, psychologia, socjologia).

Celem nauczania matematyki jest wspomaganie wszechstronnego rozwoju ucznia ukierunkowanego na przygotowanie go do rozumienia współczesnego świata i aktywnego uczestnictwa w życiu.

3.1. Cele kształcenia:

- kształcenie i rozwijanie umiejętności logicznego myślenia,
- rozwijanie i doskonalenie języka, tak by był precyzyjny i jednoznaczny,
- wyrobienie umiejętności wyszukiwania i właściwego interpretowania zebranych informacji,
- opieranie swoich przekonań na rzetelnych informacjach i przesłankach,
- przygotowanie do dostrzegania różnych problemów i zjawisk społecznych, ekonomicznych, przyrodniczych, technicznych, ich analizowania, opisywania z wykorzystaniem wiedzy matematycznej i języka matematyki,
- przygotowanie i wyrabianie nawyku samodzielnego zdobywania wiedzy i nabywania umiejętności oraz konstruowania własnych strategii postępowania,
- przygotowanie do umiejętnego korzystania z różnych źródeł informacji oraz z nowoczesnych technologii,
- doskonalenie rozumienia i biegłości technik obliczeniowych,
- doskonalenie i kształcenie umiejętności wykonywania działań na wyrażeniach algebraicznych,

- doskonalenie i rozwijanie umiejętności sporządzania wykresów funkcji oraz odczytywania ich własności,
- wykrywanie związków i zależności funkcyjnych między wielkościami liczbowymi,
- rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem własności ciągów arytmetycznego i geometrycznego,
- doskonalenie i kształcenie umiejętności rozwiązywania równań, nierówności i układów równań,
- kształcenie umiejętności prowadzenia prostego rozumowania dedukcyjnego,
- rozwijanie wyobraźni przestrzennej,
- doskonalenie i kształcenie umiejętności rozwiązywania problemów z planimetrii i stereometrii oraz geometrii analitycznej,
- wprowadzenie pojęć trygonometrycznych, kształcenie umiejętności rozwiązywania problemów z planimetrii z użyciem trygonometrii,
- doskonalenie i kształcenie umiejętności stosowania podstawowych pojęć statystycznych,
- kształcenie umiejętności prowadzenia prostych badań statystycznych,
- kształcenie umiejętności rozwiązywania prostych problemów kombinatorycznych,
- doskonalenie umiejętności czytania ze zrozumieniem tekstu matematycznego,
- **kształcenie umiejętności stosowania języka symbolicznego i dowodzenia.**

3.2. Cele wychowania:

- kształcenie nawyku dobrej organizacji pracy,
- kształcenie wytrwałości, pracowitości i systematyczności przy podejmowaniu działań,
- kształtowanie postawy samodzielności, dociekliwości i krytycyzmu w stosunku do swoich działań,
- kształcenie postawy otwartości i szacunku dla pomysłów i poglądów innych ludzi,
- rozwijanie umiejętności społecznych takich jak: współpraca w zespole i organizacja pracy tego zespołu, prowadzenie dyskusji, prezentowanie wyników własnej pracy, negocjowanie.

4. Treści nauczania matematyki oraz opis założonych osiągnięć ucznia

Zamieszczone w tym programie treści nauczania matematyki oparte są na obowiązującej podstawie programowej i uwzględniają standardy wymagań maturalnych.

Przedstawiony poniżej podział treści jest tylko propozycją sprawdzoną przez nas w praktyce. Ostateczna decyzja co do rozkładu treści należy do nauczyciela. Jest uwarunkowana typem szkoły, rodzajem zespołu klasowego oraz indywidualnymi potrzebami w danej klasie. Na przykład tematy *Wektory* i *Funkcje trygonometryczne kąta ostrego* od kilku lat realizujemy na pierwszych lekcjach matematyki w klasie pierwszej. Tak wynika z korelacji między matematyką a fizyką,

a w przypadku technikum (np. mechanicznego, elektrycznego, samochodowego) również z korelacji z przedmiotami zawodowymi. W podręczniku do tego programu zamieszczamy tematy w ustalonym porządku, dajemy jednak nauczycielowi pełną swobodę w wyborze kolejności ich realizowania.

Mamy nadzieję, że uczeń, który zamierza zdawać maturę z matematyki opanuje treści, które zawiera podstawa programowa w stopniu co najmniej dostatecznym.

Uwaga. Treści nauczania do kształcenia w zakresie rozszerzonym są zaznaczone pogrubioną czcionką.

Treści nauczania	Przewidywane umiejętności ucznia
Działania w zbiorze liczb rzeczywistych	
<ol style="list-style-type: none"> Zbiór liczb rzeczywistych i jego podzbiory. Rozkład na czynniki pierwsze liczb naturalnych. Rozwinięcie dziesiętne liczb rzeczywistych. Twierdzenie o rozkładzie liczby naturalnej na czynniki pierwsze. Twierdzenie o niewymierności pierwiastka kwadratowego z liczby 2. Działania w zbiorze liczb rzeczywistych i prawa działań, w tym potęga o wykładniku wymiernym, pierwiastek dowolnego stopnia z uwzględnieniem pierwiastkowanie parzystego stopnia z liczby ujemnej, informacja o własnościach potęg o wykładniku rzeczywistym, szacowanie, błąd przybliżenia. Uporządkowanie zbioru liczb rzeczywistych, oś liczbowa, przedziały liczbowe i działania na nich. Działania na zbiorach. Podstawowe pojęcia rachunku zdań. Wartość bezwzględna i jej interpretacja geometryczna, rozwiązywanie równań i nierówności z wartością bezwzględną prowadzących do równań i nierówności typu: $x - a = b$, $x - a < b$, $x - a > b$, $x - a - b = c$, $x - a - b > c$, $x - a - b < c$. Obliczenia procentowe. Procenty i punkty procentowe, lokaty i kredyty w zadaniach (sytuacjach) praktycznych. Pojęcie logarytmu i własności logarytmów (logarytm iloczynu i logarytm ilorazu, logarytm potęgi o wykładniku naturalnym, zamiana podstaw). 	<p>Uczeń potrafi:</p> <ul style="list-style-type: none"> poprawnie wykonać działania na liczbach rzeczywistych, z uwzględnieniem potęgowania, pierwiastkowania i logarytmowania – zna i stosuje prawa działań, rozpoznać liczby naturalne, całkowite, wymierne, niewymierne, uzasadnić, że dana liczba jest naturalna, całkowita, wymierna lub niewymierna, rozłożyć na czynniki pierwsze liczby naturalne, zaplanować strategię i rozwiązać problemy związane z podzielnością liczb naturalnych, wykorzystać pojęcia NWD i NWW, porównać liczby rzeczywiste, przekształcać ułamki, wykonać działania na wyrażeniach algebraicznych, poprawnie zastosować wzory skróconego mnożenia, w tym wzór $a^n - 1$, oszacować wyniki działań, wartości liczbowe wyrażeń, ocenić błąd przybliżenia, zaznaczyć na osi liczbowej przedziały opisane z użyciem nierówności, w której może też wystąpić wartość bezwzględna, wykonać działania na przedziałach, wykonać działania na zbiorach, zastosować podstawowe prawa działań, zastosować elementy języka matematycznego, zastosować obliczenia procentowe, również w zadaniach praktycznych.

Treści nauczania	Przewidywane umiejętności ucznia
Wektory	
<ol style="list-style-type: none"> Pojęcie wektora, długość, równość, wektory przeciwne. Wektory w prostokątnym układzie współrzędnych. Dodawanie wektorów, mnożenie wektora przez liczbę; współrzędne środka odcinka. 	<p>Uczeń potrafi:</p> <ul style="list-style-type: none"> posługiwać się pojęciem wektora, wektora przeciwnego, zwrotu, kierunku i długości wektora, opisać wektory przy użyciu współrzędnych, porównać dwa wektory, wykonać dodawanie i odejmowanie wektorów, wykonać mnożenie wektora przez liczbę, wyznaczyć obraz punktu w przesunięciu o dany wektor na płaszczyźnie kartezjańskiej.
Funkcja i jej własności	
<ol style="list-style-type: none"> Pojęcie funkcji. Sposoby przedstawiania funkcji. Wykres funkcji, opisywanie własności funkcji na podstawie jej wykresu. Wyznaczanie dziedziny, zbioru wartości i miejsc zerowych na podstawie wzoru funkcji. Określanie parzystości/nieparzystości, różnowartościowości funkcji. Określanie monotoniczności funkcji na podstawie jej wykresu. Badanie monotoniczności, parzystości i nieparzystości, różnowartościowości funkcji. Najmniejsza i największa wartość funkcji w dziedzinie i w przedziale. Rysowanie wykresów funkcji o zadanych wzorach lub własnościach. Zastosowanie wiadomości o funkcjach do rozwiązywania zadań o kontekście praktycznym. 	<p>Uczeń potrafi:</p> <ul style="list-style-type: none"> przedstawić różnymi sposobami funkcję, ocenić, czy podane odwzorowanie jest funkcją, czy nie, opisać własności funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, monotoniczność, parzystość, różnowartościowość, na podstawie jej wykresu, tabelki, opisu słownego, grafu, odczytać z wykresu zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje określone wartości: dodatnie, ujemne, większe, mniejsze, niewiększe, niemniejsze od podanej liczby, sporządzić wykres funkcji o podanych własnościach, wyznaczyć najmniejszą (największą) wartość funkcji w dziedzinie lub przedziale na podstawie wykresu funkcji, wyznaczyć dziedzinę, zbiór wartości, zbadać monotoniczność, różnowartościowość funkcji określonej za pomocą wzoru, opisać za pomocą funkcji zależności występujące w przyrodzie, ekonomii i innych dziedzinach.
Przekształcanie wykresów funkcji	
<ol style="list-style-type: none"> Symetria osiowa względem osi OX oraz osi OY. Symetria środkowa względem punktu (0, 0). Przesunięcie równoległe o wektor $[p, q]$. Sporządzanie wykresów funkcji będących efektem wykonania kilku przekształceń. 	<p>Uczeń potrafi:</p> <ul style="list-style-type: none"> przekształcić symetrycznie wykres funkcji względem osi OX, OY lub punktu (0, 0) i podać wzór uzyskanej funkcji, przesunąć wykres funkcji o podany wektor i podać wzór uzyskanej funkcji, wykonać wykresy funkcji $y = f(x)$, $y = f(x)$, $y = f(ax)$, $y = af(x)$ i wykresy złożonych tych funkcji.
Funkcja liniowa	
<ol style="list-style-type: none"> Funkcja liniowa o wzorze $f(x) = ax + b$ i jej własności. Sporządzanie wykresów funkcji liniowych. Wyznaczanie wzoru funkcji liniowej na podstawie jej wykresu. Interpretacja monotoniczności, miejsc zerowych, punkt wspólny osi OY z wykresem funkcji liniowej, w zależności od współczynników a i b we wzorze danej funkcji liniowej. 	<p>Uczeń potrafi:</p> <ul style="list-style-type: none"> rozpoznać wzór funkcji liniowej, odczytać współczynniki a i b oraz rozumie ich interpretację graficzną, sporządzić wykres funkcji liniowej, mając dany jej wzór,

4. Treści nauczania matematyki

Treści nauczania	Przewidywane umiejętności ucznia
<ol style="list-style-type: none"> 2. Zastosowanie funkcji liniowej do opisywania zjawisk z życia codziennego. 3. Równania i nierówności liniowe. Równanie liniowe z dwiema niewiadomymi. Układy równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi (układ oznaczony, nieoznaczony, sprzeczny). 4. Rozwiązywanie zadań tekstowych z zastosowaniem równań i nierówności liniowych oraz układów równań. 5. Funkcja liniowa z parametrem. Wyznaczanie wzoru funkcji przedziałami liniowej. Szkicowanie wykresów funkcji liniowej z wartością bezwzględną. 6. Równania i nierówności z wartością bezwzględną typu: $ax - b = c$, $ax - b < c$, $ax - b > c$, $x - a + x - b = c$. Równanie liniowe z parametrem i wartością bezwzględną. 7. Układy równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi z parametrem. Układy równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi i wartością bezwzględną. 	<ul style="list-style-type: none"> – określić monotoniczność funkcji liniowej na podstawie wzoru i wykresu, – z badać monotoniczność funkcji, – wyznaczyć miejsca zerowe, – wyznaczyć algebraicznie i graficznie argumenty, dla których funkcja jest dodatnia, lub ujemna, – wyznaczyć równanie prostej, mając dany jej współczynnik kierunkowy i punkt, przez który przechodzi, – ocenić, czy wykresy funkcji są prostymi równoległymi czy prostopadłymi (na podstawie wzorów tych funkcji), – wyznaczyć wzór funkcji, której wykres jest równoległy lub prostopadły do wykresu danej prostej, – wyznaczyć wzór funkcji, której wykres przechodzi przez dwa dane punkty, – wyjaśnić pojęcie proporcjonalności prostej i dostrzec jej związek z funkcją liniową, – rozwiązać zadania tekstowe związane z proporcjonalnością prostą, – rozwiązać równania i układy równań liniowych, – rozwiązać zadania tekstowe, z wykorzystaniem równania, nierówności lub układu równań liniowych, – rozwiązać równania i nierówności oraz układy równań z wartością bezwzględną, – przeprowadzić dyskusję liczby rozwiązań równania liniowego z parametrem oraz układu równań liniowych z parametrem, – opisać zbiory na płaszczyźnie za pomocą nierówności i układów nierówności.
Funkcja kwadratowa	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Postać ogólna, kanoniczna i iloczynowa. 2. Wykres funkcji kwadratowej i jej własności: zbiór wartości, monotoniczność, miejsca zerowe, oś symetrii wykresu. 3. Największa i najmniejsza wartość funkcji kwadratowej w dziedzinie i w przedziale domkniętym. 4. Zadania optymalizacyjne prowadzące do badania funkcji kwadratowej. 5. Równania i nierówności kwadratowe. Zadania z tekstem prowadzące do rozwiązywania równań i nierówności kwadratowych. 6. Wzory Viete'a i ich zastosowanie do określania znaku miejsc zerowych. 7. Wykresy funkcji kwadratowych z wartością bezwzględną. 8. Równania i nierówności kwadratowe z parametrem lub wartością bezwzględną. 	<p>Uczeń potrafi:</p> <ul style="list-style-type: none"> – rozpoznać postać ogólną, kanoniczną i iloczynową funkcji kwadratowej, przekształcić jedną postać na drugą, – sporządzić wykres funkcji kwadratowej, korzystając z każdej z tych trzech postaci, – wyznaczyć wzór funkcji na podstawie wykresu i na podstawie danych jej własności, – wyznaczyć współrzędne wierzchołka paraboli, – wyznaczyć miejsca zerowe i zna warunki ich istnienia z określeniem ich ilości, – określić zbiór wartości funkcji kwadratowej, – wyznaczyć wartość najmniejszą i największą funkcji kwadratowej w podanym przedziale, – zastosować umiejętność wyznaczania najmniejszej i największej wartości funkcji kwadratowej do rozwiązywania zadań tekstowych, – przeprowadzić dyskusję istnienia i liczby miejsc zerowych oraz znaku funkcji kwadratowej ze względu na parametr, – wyznaczyć zbiór rozwiązań równania i nierówności kwadratowej, – rozwiązać zadania tekstowe prowadzące do rozwiązywania równań i nierówności kwadratowych,

Treści nauczania	Przewidywane umiejętności ucznia
	<ul style="list-style-type: none"> - zastosować wzory na sumę i iloczyn pierwiastków równania kwadratowego, - obliczyć wartości wyrażeń, stosując wzory Viete'a, - zastosować metodę wprowadzania pomocniczej niewiadomej, rozpoznać i rozwiązać równanie dwukwadratowe, - przeprowadzić dyskusję liczby rozwiązań tego równania ze względu na jeden parametr, - rozwiązać równania z parametrem, z wykorzystaniem wzorów Viete'a.
Wielomiany	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Działania na wyrażeniach algebraicznych, wzory skróconego mnożenia. 2. Pojęcie stopnia wielomianu, równość wielomianów. 3. Działania na wielomianach, dodawanie, odejmowanie i mnożenie wielomianów. 4. Rozkładanie wielomianów na czynniki. 5. Rozwiązywanie prostych równań wielomianowych. 6. Zadania z kontekstem praktycznym, prowadzące do prostych równań wielomianowych. 7. Dzielenie wielomianów z resztą przez dwumian $x - a$ 8. Twierdzenie o reszcie. 9. Twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych. 10. Rozwiązywanie równań i nierówności wielomianowych, również z wartością bezwzględną. 	<p>Uczeń potrafi:</p> <ul style="list-style-type: none"> - rozpoznać wyrażenia, które są wielomianami, określić stopień wielomianu, uporządkować wielomian, - wykonać poprawnie dodawanie, odejmowanie, mnożenie wielomianów, - sprawdzić, czy dana liczba jest miejscem zerowym wielomianu, - rozłożyć wielomiany na czynniki metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias, grupowania wyrazów oraz stosując wzory skróconego mnożenia $(a \pm b)^2$, $a^2 - b^2$, $(a + b)^3$, $a^3 \pm b^3$, - rozwiązać równania i nierówności wielomianowe poprzez rozkład wielomianu na czynniki, - wykonać dzielenie wielomianu przez dwumian $x - a$, - zastosować twierdzenie o reszcie i twierdzenie o pierwiastkach wymiernych do znajdowania pierwiastków wielomianu, - rozwiązać problemy dotyczące dzielenia z resztą, stosując twierdzenie o zapisie wielomianu w postaci $W(x) = P(x)F(x) + R(x)$, - wyjaśnić pojęcie krotności pierwiastka, określić krotność pierwiastka wielomianu, - rozwiązać równania i nierówności wielomianowe różnymi metodami.
Wyrażenia wymierne	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Wyznaczanie dziedziny wyrażenia wymiernego z jedną niewiadomą, którego mianownik jest wielomianem dającym się rozłożyć na czynniki liniowe i kwadratowe metodami poznаныmi podczas realizacji tematu „wielomiany”. 2. Obliczanie wartości liczbowych wyrażeń wymiernych. 3. Przekształcanie i wykonywanie działań na wyrażeniach wymiernych: skracanie, rozszerzanie, dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie. 4. Rozwiązywanie równań wymiernych w postaci proporcji, np. $\frac{x+1}{x+3} = 2$; $\frac{x+1}{x} = 2$. 5. Zadania z kontekstem praktycznym, prowadzące do prostych równań wymiernych. 	<p>Uczeń potrafi:</p> <ul style="list-style-type: none"> - określić dziedzinę funkcji wymiernej, jeśli mianownik jest wielomianem, który rozkłada się na iloczyn, - naszkicować wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ i omówić jej własności, - narysować wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x} + q$ i funkcji $g(x) = \frac{a}{x-p}$, - podać własności funkcji f i g, w tym równania asymptot, - przekształcić wyrażenie wymierne, wyznaczając jedną ze zmiennych w zależności od innych (przekształcanie wzorów),

4. Treści nauczania matematyki

Treści nauczania	Przewidywane umiejętności ucznia
<p>6. Funkcja $f(x) = \frac{a}{x}$ i jej wykres, w tym przesunięcie równoległe o wektor, odczytywanie własności z wykresu, rozwiązywanie zadań praktycznych związanych z proporcjonalnością odwrotną.</p> <p>7. Rozwiązywanie prostych nierówności wymiernych, np. $\frac{x+1}{x+3} > 2$; $\frac{x+1}{x} < 3$.</p> <p>8. Rozwiązywanie równań i nierówności wymiernych z wartością bezwzględną.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - wykonać działania na wyrażeniach wymiernych, sprowadzając je do wspólnego mianownika (rozkładanie na czynniki), - rozwiązać równanie wymierne prowadzące do równania liniowego lub kwadratowego, - rozwiązać równania i nierówności wymierne.
Trygonometria cz. 1.	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym. 2. Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta ostrego. Proste tożsamości trygonometryczne. 3. Wyznaczanie wartości funkcji trygonometrycznych, gdy dana jest jedna z nich. 4. Rozwiązywanie zadań z geometrii z zastosowaniem funkcji trygonometrycznych kąta ostrego. 5. Rozwiązywanie równań trygonometrycznych typu $f(x) = a$, gdy f jest funkcją trygonometryczną a x – oznacza miarę kąta ostrego. 	<p>Uczeń potrafi:</p> <ul style="list-style-type: none"> - zastosować definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym, - wyznaczyć wartości funkcji trygonometrycznych, gdy zna wartość jednej z nich, - zastosować trygonometrię do rozwiązywania problemów geometrycznych, - rozwiązać równania trygonometryczne typu $f(x) = a$, gdy f jest funkcją trygonometryczną a x – oznacza miarę kąta ostrego, - zastosować proste związki trygonometryczne do badania tożsamości, zna pojęcie tożsamości trygonometrycznej.
Trygonometria cz. 2. Funkcje trygonometryczne	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Miara łukowa kąta. 2. Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta. Wykresy funkcji trygonometrycznych, własności funkcji trygonometrycznych. 3. Wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów. Obliczanie wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta. 4. Rozwiązywanie równań trygonometrycznych, przekształcenia których (lub wprowadzenia pomocniczej niewiadomej), prowadzą do rozwiązywania równań typu $f(ax) = b$, lub $af^2(x) + bf(x) + c = 0$, gdzie f – funkcja trygonometryczna zmiennej rzeczywistej x. 5. Rozwiązywanie prostych nierówności typu $f(ax) > b$, $(f(ax) < b)$ gdzie f – funkcja trygonometryczna zmiennej rzeczywistej x. 	<p>Uczeń potrafi:</p> <ul style="list-style-type: none"> - zamienić miarę stopniową na łukową kąta i łukową na stopniową, - sporządzić wykresy funkcji trygonometrycznych, również wykresy typu $af(x)$ i $f(ax)$, opisać ich własności: parzystość, nieparzystość, miejsca zerowe, znak, okresowość, dziedzinę, zbiór wartości, - rozwiązać równania i nierówności trygonometrycznej, odwołując się do wykresów funkcji trygonometrycznych, - zbadać tożsamości trygonometryczne, stosując również wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, - rozwiązać równania trygonometryczne, których rozwiązanie prowadzi do rozwiązywania równań typu $f(ax) = b$ lub $f^2(x) + bf(x) + c = 0$, gdzie f – funkcja trygonometryczna zmiennej rzeczywistej, - rozwiązać nierówności trygonometryczne typu $f(ax) > b$, $(f(ax) < b)$ gdzie f – funkcja trygonometryczna zmiennej rzeczywistej x.
Ciągi	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Przykłady ciągów skończonych i nieskończonych. 2. Ciąg arytmetyczny i jego własności. 3. Ciąg geometryczny i jego własności. 	<p>Uczeń potrafi:</p> <ul style="list-style-type: none"> - podać przykłady ciągów liczbowych, - określić ciąg liczbowy za pomocą wzoru ogólnego (a_n),

Treści nauczania	Przewidywane umiejętności ucznia
<p>4. Rozwiązywanie zadań z kontekstem praktycznym związanych z ciągami.</p> <p>5. Ciągi zdefiniowane rekurencyjnie.</p>	<ul style="list-style-type: none"> – obliczyć dowolny wyraz ciągu (a_n), – sporządzić wykres ciągu liczbowego, – zbadać monotoniczność ciągu liczbowego, – wyznaczyć wyrazy ciągów zdefiniowanych rekurencyjnie, – zbadać czy dany ciąg jest ciągiem arytmetycznym, czy geometrycznym, – obliczyć dowolne wyrazy ciągu arytmetycznego na podstawie informacji o ciągu, – poprawnie zastosować wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu, – poprawnie zastosować wzory na n-ty wyraz ciągu i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i geometrycznego, – rozwiązać problemy o kontekście praktycznym, do rozwiązania których, użyje wzorów na n-ty wyraz lub sumę n początkowych wyrazów ciągu, – zamienić ułamek dziesiętny okresowy na ułamek zwykły, – zastosować wzór na procent składany jako przykład ciągu geometrycznego, – wykonać obliczenia bankowe z wykorzystaniem pojęcia procentu składanego: kapitał, stopa procentowa, odsetki.
Planimetria cz. 1	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Usystematyzowanie wiadomości dotyczących takich pojęć, jak: punkt, prosta, odcinek, figury wypukłe i wklęsłe, ograniczone i nieograniczone. Pojęcie odległości. 2. Rodzaje kątów. Kąty wierzchołkowe, przyległe, kąty przy prostych równoległych przeciętych trzecią prostą. Związki między kątem środkowym, kątem wpisanym oraz kątem dopisanym. 3. Położenie prostych na płaszczyźnie, położenie dwóch okręgów na płaszczyźnie. 4. Twierdzenia o środkowych, wysokościach, symetrycznych boków i dwusiecznych kątów w trójkącie. Zadania konstrukcyjne. 5. Odcinek łączący środki boków w trójkącie. Zależności między bokami i kątami w trójkącie. 6. Podział trójkątów ze względu na boki i kąty. Suma kątów w trójkącie. Twierdzenie Pitagorasa. Nierówność trójkąta – zadania optymalizacyjne. 7. Przystawianie trójkątów. Rozwiązywanie różnych zadań dotyczących trójkątów w tym trójkątów przystających. 	<p>Uczeń potrafi:</p> <ul style="list-style-type: none"> – podać przykłady figur o określonych własnościach, – zastosować własności kątów wierzchołkowych, przyległych, naprzemianległych i odpowiadających, środkowych i wpisanych w okrąg, – zastosować warunki opisujące wzajemne położenie prostej i okręgu oraz dwóch okręgów, – zastosować własności dwusiecznej, symetralnej, środkowych trójkąta, twierdzenie o odcinku łączącym środki boków trójkąta lub środki ramion trapezu w rozwiązywaniu zadań, – stosować twierdzenie Pitagorasa, – skonstruować dwusieczną kąta, symetralną odcinka, styczną do okręgu przechodzącą przez punkt leżący na okręgu, przechodzącą przez punkt nie leżący na okręgu, – wyznaczyć środek i promień okręgu wpisanego i opisanego na dowolnym trójkącie, skonstruować okrąg opisany i wpisany w trójkąt, – wykorzystać cechy przystawiania trójkątów do rozwiązywania zadań, – zastosować wzór na sumę kątów wewnętrznych wielokąta oraz na liczbę przekątnych.
Planimetria cz. 2.	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Wielokąty i ich własności; ze szczególnym uwzględnieniem czworokątów. 2. Związki miarowe między odcinkami stycznych i siecznych. 	<p>Uczeń potrafi:</p> <ul style="list-style-type: none"> – opisać własności czworokątów, rozpoznać czworokąt na podstawie własności,

4. Treści nauczania matematyki

Treści nauczania	Przewidywane umiejętności ucznia
<ol style="list-style-type: none"> 3. Twierdzenie Talesa. Figury podobne, figury jednokładne. Podobieństwo trójkątów. Rozwiązywanie zadań również z kontekstem praktycznym. 4. Pole figur, zastosowanie trygonometrii do rozwiązywania zadań dotyczących związków miarowych w figurach. 5. Twierdzenie o związkach miarowych między odcinkami stycznych i siecznych. 6. Czworokąty, czworokąt wpisany w okrąg i opisany na okręgu. 7. Twierdzenie sinusów, twierdzenie cosinusów. Związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów. 	<ul style="list-style-type: none"> – rozwiązać problemy, z wykorzystaniem twierdzenia o związkach miarowych między odcinkiem na stycznej i odcinkami na siecznej, – obliczyć pola i obwody różnych figur, również z zastosowaniem trygonometrii, – wykonać konstrukcje z wykorzystaniem tw. Talesa i tw. Pitagorasa, – zastosować tw. Talesa i twierdzenie do niego odwrotne oraz wnioski wynikające z tw. Talesa, – stosować cechy podobieństwa trójkątów do rozwiązywania zadań, w szczególności potrafi zastosować zależność pól i obwodów figur podobnych, – rozwiązać zadania z wykorzystaniem jednokładności, – zastosować kryteria wpisywalności okręgu w czworokąt i kryterium opisowości okręgu na czworokącie, – rozwiązać zadanie z zastosowaniem twierdzenia sinusów i cosinusów, – przewodzą rozumowanie typu: uzasadnij, udowodnij, wykaż, które wymagają zastosowania związków miarowych w figurach, tw. sinusów, tw. cosinusów, tw. o odcinkach na stycznych i siecznych, rachunku wektorowego.
Geometria analityczna	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Proste na płaszczyźnie kartezjańskiej. Równanie kierunkowe i ogólne prostej. 2. Równoległość i prostopadłość prostych na płaszczyźnie. 3. Interpretacja układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi. 4. Odległość dwóch punktów, odległość punktu od prostej, odległość dwóch prostych równoległych na płaszczyźnie. 5. Równanie okręgu w postaci kanonicznej. 6. Interpretacja nierówności liniowej z dwiema niewiadomymi, interpretacja układu nierówności. 7. Rozwiązywanie zadań związanych z położeniem prostych i okręgów oraz dwóch okręgów na płaszczyźnie kartezjańskiej. 8. Opisywanie koła za pomocą nierówności. 9. Wykonywanie działań na wektorach (dodawanie, odejmowanie, mnożenie przez liczbę). 10. Stosowanie wektorów do dowodzenia własności figur i rozwiązywania zadań. 	<p>Uczeń potrafi:</p> <ul style="list-style-type: none"> – rozpoznać i zapisać równania prostej w postaci kierunkowej oraz w postaci ogólnej, – odróżniać czy proste są równoległe, czy prostopadłe na podstawie ich równań kierunkowych i ogólnych, zna warunki równoległości i prostopadłości prostych, – wyznaczać równania prostych równoległych oraz prostych prostopadłych do danej prostej, – wyznaczać równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty, – obliczyć odległość punktu od prostej oraz odległość dwóch prostych równoległych, – rozwiązać zadania, w których stosuje warunki opisujące wzajemne położenie prostej i okręgu oraz dwóch okręgów, – rozwiązać zadania, w których stosuje wzór kanoniczny równania okręgu i nierówności koła, – napisać równanie stycznej do okręgu, gdy dany jest punkt styczności lub dowolny punkt stycznej, – rozwiązać zadania dotyczące prostej i okręgu, w tym zadania z wykorzystaniem układu równań st. II także z parametrem.
Funkcja wykładnicza i logarytmiczna	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Sporządzanie wykresów funkcji wykładniczych dla różnych podstaw. 2. Rozwiązywanie zadań z kontekstem praktycznym. 	<p>Uczeń potrafi:</p> <ul style="list-style-type: none"> – sporządzić wykres funkcji logarytmicznej i funkcji wykładniczej przy różnych podstawach, zna ich własności; wie, że są to funkcje wzajemnie odwrotne,

Treści nauczania	Przewidywane umiejętności ucznia
3. Wykresy funkcji logarytmicznych dla różnych podstaw. 4. Proste równania i nierówności wykładnicze i logarytmiczne.	<ul style="list-style-type: none"> - rozwiązać równania i nierówności logarytmiczne i wykładnicze, wykorzystując twierdzenia dotyczące działań na potęgach, logarytmach, różnowartościowość i monotoniczność funkcji logarytmicznej i wykładniczej, - rozwiązać zadania z wykorzystaniem funkcji logarytmicznej i funkcji wykładniczej w kontekście praktycznym.
Stereometria	
1. Równoległość i prostopadłość w przestrzeni. 2. Kąt między prostą i płaszczyzną. Kąt dwuścienny. 3. Wyznaczanie związków miarowych w wielościanach i bryłach obrotowych z zastosowaniem trygonometrii. 4. Rzut prostokątny na płaszczyznę. 5. Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych. 6. Przekroje wielościanów płaszczyzną.	Uczeń potrafi: <ul style="list-style-type: none"> - nazwać wielościan, opisać jego własności, zna wielościany prawidłowe i foremne, - wyznaczyć kąt nachylenia prostej do płaszczyzny i kąt między dwiema płaszczyznami, - wyznaczyć kąty między krawędziami, wysokościami i innymi odcinkami w wielościanach, - narysować siatki graniastosłupa, ostrosłupa, - wyznaczyć związki miarowe w wielościanach i bryłach obrotowych, również z zastosowaniem trygonometrii, - zastosować twierdzenie o trzech prostych prostopadłych, - wskazać dowolny przekrój wielościanu, bryły obrotowej, obliczyć jego pole i obwód, - rozwiązać zadania na dowodzenie dotyczące własności wielościanów i brył obrotowych, - opisać i wpisać bryły w inne bryły i znaleźć odpowiednie zależności między nimi.
Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka	
1. Zliczanie przypadków w prostych sytuacjach kombinatorycznych. 2. Zasada mnożenia. 3. Suma, iloczyn i różnica zdarzeń. 4. Schemat klasyczny prawdopodobieństwa. 5. Obliczanie prawdopodobieństwa w przypadku skończonej liczby zdarzeń elementarnych. 6. Liczba kombinacji, permutacji, wariacji z powtórzeniami i bez powtórzeń. 7. Średnia arytmetyczna, średnia ważona, odchylenie standardowe, mediana.	Uczeń potrafi: <ul style="list-style-type: none"> - dobrać model do doświadczenia, - zliczyć wyniki doświadczenia, określić podzbiór zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu opisywanej sytuacji, - stosować zasadę mnożenia do zliczania obiektów w opisywanych doświadczeniach, - wyznaczyć sumę, iloczyn, różnicę zdarzeń, - obliczyć prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia stosując wzory, rysując „drzewo”, - zastosować znane własności prawdopodobieństwa, - określić zdarzenia za pomocą podzbiorów lub ciągów, - zastosować wzory na liczbę kombinacji, permutacji, wariacji z powtórzeniami i bez powtórzeń, - obliczyć, stosując „drzewo”, prawdopodobieństwo warunkowe, - opisać, stosując „drzewo” model doświadczenia wieloetapowego, - przedstawić dane w postaci diagramu, wykresu, tabeli, - odczytać i zinterpretować tabele, wykresy, diagramy, - obliczyć wartość średniej arytmetycznej, średniej ważonej, mediany i odchylenia standardowego, skomentować otrzymany wynik.

5. Procedury osiągnięcia szczegółowych celów edukacyjnych

„Bez względu na to, jak bardzo niedostępny jest problem ... musi nadejść rozwiązanie w efekcie skończonej liczby procesów czysto logicznych”

Dawid Gilbert

5.1. Propozycja metod pracy z uczniami

Osiągnięcie celów edukacyjnych zaplanowanych w rozporządzeniu dotyczącym podstawy programowej oraz celów zapisanych w programie jest możliwe tylko wtedy, gdy lekcje matematyki dadzą uczniom jak najwięcej korzyści. W matematyce na pierwszym miejscu w hierarchii celów ustawilibyśmy kształtowanie takich postaw u uczniów, które umożliwiają mu **samodzielne i odpowiedzialne uczenie się**. W zespole klasowym mamy uczniów o różnych predyspozycjach intelektualnych i różnych potrzebach emocjonalnych. Dotarcie do każdego ucznia jest niezmiernie trudne. Rolą nauczyciela jest:

- stwarzanie przyjaznego klimatu,
- budowanie kultury wysiłku intelektualnego,
- wprowadzanie w świat dyskusji.

Uczniowie powinni być świadomi tego, że są **współodpowiedzialni za** to jaką **wiedzę** posiadają i jakie **umiejętności** zdobędą. Nauczyciel, jak dobry przewodnik, powinien uświadamiać uczniom, jak ważne miejsce zajmuje matematyka w problemach życia codziennego, jakie wymagania stawiają przed przyszłymi studentami uczelnie.

Istotne znaczenie w osiągnięciu celów mają:

- **metody i formy** organizacji zajęć,
- użycie na lekcjach **pomoce dydaktyczne**.

Dobrze dobrane metody, w których stawiamy na rozbudzenie myślenia matematycznego i aktywność uczniów na pewno przyniosą zadowalające rezultaty. W doborze metod nauczyciel zawsze powinien pamiętać, że najważniejszy jest proces **dochodzenia do rozwiązania**, a nie samo rozwiązanie, bo wtedy zanika zaniepokojenie i nie ma dialogu. Rozmowa umożliwia ćwiczenie u ucznia języka, jakim posługuje się matematyka. Należy zawsze pamiętać, że planując przebieg lekcji, nie tylko musimy dobrać właściwe treści nauczania, ale również powinniśmy

zaplanować nasze działania zarządzania klasą, tak by podczas lekcji panował ład i odpowiednia dyscyplina.

Zdajemy sobie sprawę, że nie ma uniwersalnych metod i form pracy z młodzieżą, każda z nich ma plusy i minusy. Ważne jest, aby nauczyciel podejmował wysiłek zbadania możliwości uczniów i ich temperamentów (choćby przez wnikliwą obserwację i analizę wyników). Wówczas na pewno będzie potrafił dobrać najlepszą metodę dla zespołu klasowego. W wielu klasach problemem jest zmobilizowanie uczniów do wysiłku intelektualnego i wzbudzenie zainteresowania tym co dzieje się na lekcji matematyki.

Wśród metod nauczania często powinniśmy sięgać po **metody aktywizujące**, które:

- rozbudzają zainteresowania ucznia,
- zwiększają jego samodzielność,
- rozwijają twórcze myślenie i kreatywne działanie,
- motywują do działania,
- rozwijają umiejętności współpracy i komunikacji w grupie rówieśniczej,
- podnoszą skuteczność nauczania i uczenia się.

Dobrym sposobem na pracę z każdym zespołem jest uatrakcyjnianie zajęć edukacyjnych poprzez stosowanie różnorodnych **form organizacyjnych** lekcji, tak aby uczniowie czuli na sobie spoczywającą odpowiedzialność za zadanie, które mają do wykonania. Należą do nich między innymi:

- praca samodzielna,
- praca w parach,
- praca w grupach kilkusobowych,
- korzystanie z różnych pomocy dydaktycznych, jak **gry, domina dydaktyczne, film, plakat, modele i siatki brył**.

Większe zaangażowanie i zaniepokojenie uczniów wzbudzają lekcje, podczas których mogą korzystać z **kalkulatorów naukowych, graficznych czy komputera**. Takie lekcje dobrze jest zaplanować,

omawiając hasła związane z obliczeniami procentowymi, statystyką, funkcjami i ich wykresami.

Realizacja celów założonych w programie nauczania matematyki odbywać się powinna poprzez najważniejsze elementy w nauczaniu matematyki:

- dużą liczbę ćwiczeń sprawdzających rozumienie treści nauczania,
- rozwiązywanie problemów z „życia wziętych”,
- rozwiązywanie zadań o zróżnicowanym stopniu trudności,
- indywidualny kontakt ucznia z nauczycielem m.in. z wykorzystaniem Internetu (np. Platformy Moodle).

Wśród aktywności uczniowskich ważne jest podejmowanie zagadnień o charakterze **problemów otwartych** i badań zaplanowanych na dłuższy okres czasu. Uczeń przy tak zaplanowanej aktywności samodzielnie rozwija swoją wiedzę i poszerza aparat matematyczny. Wiedza zdobyta w ten sposób staje się trwalsza poprzez to, że uczeń:

- wyraża swoje myśli słownie i na piśmie,
- samodzielnie rozwiązuje i konstruuje zadania,
- ćwiczy różne sprawności i umiejętności.

Doświadczony nauczyciel jest świadomy tego, że na pewne właściwości klasy nie ma wpływu, młody nauczyciel dopiero się tego uczy. Każdy nauczyciel w dużym stopniu ma wpływ na dojrzewanie klasy jako grupy społecznej, poprzez:

- wskazanie, na czym polega jej rozwój,
- uczenie pozytywnej współpracy,
- wpływanie na motywację uczniów przez łagodzenie frustracji i negatywnych napięć, gdy dochodzi do niepowodzeń,
- maksymalizowania osiągnięć.

5.2. Propozycje metod kontroli i oceny osiągnięć uczniów

W szkole ponadgimnazjalnej proponujemy stosowanie bieżących, semestralnych i końcoworocznych metod oceny wiedzy i umiejętności matematycznych ucznia. Podczas zajęć edukacyjnych ocenie podlegają:

- prace pisemne
 - długie – zapowiedziane wcześniej z większej partii materiału,
 - krótkie – zwane sprawdzianami z ostatnich dwóch, trzech lekcji,
- odpowiedzi ustne,

- prace domowe,
- aktywność ucznia na lekcji,
- projekty,
- prace długoterminowe (zadawane zwykle dla chętnych).

W każdej szkole nauczyciele oceniają zgodnie z przyjętym **wewnątrzszkolnym systemem oceniania** oraz **przedmiotowym systemem oceniania**.

Z reguły, w opracowanych w szkołach systemach oceniania, nauczyciele przyjęli jednolite normy procentowe przeliczania punktów na oceny. Istotną sprawą jest zaplanowanie pracy klasowej tak, by zadania z **poziomu koniecznego** dawały uczniowi możliwość **uzyskania oceny pozytywnej**.

Wśród prac pisemnych warto zaplanować przynajmniej raz w roku pracę, w której uczeń zmagają się z rozwiązaniem sześciu zadań (problemów, ćwiczeń rachunkowych), ocenianą według zasady – liczba całkowicie rozwiązanych zadań jest równa uzyskanej ocenie. Problem rozpoczętych zadań i niedoprowadzonych do końca rozumowań jest typowym „brakiem” naszych uczniów (wyniki badań PISA z 2003 r. i 2006 r.). Przeprowadzenie takiej formy sprawdzianu jest możliwe, gdy wcześniej zaplanujemy go w naszym przedmiotowym systemie oceniania.

Dobre efekty daje również wprowadzanie **elementów oceniania kształtującego** podczas każdej lekcji. Uczeń mógłby np. zapisać, w kilku prostych zdaniach, jakie wiadomości i umiejętności zdobywa na każdej lekcji. Przed pracą klasową zalecane jest zrobienie ankiety, w której uczeń sam ocenia swoje przygotowanie do sprawdzianu, stawiając plusy i minusy przy hasłach, które będą sprawdzane na klasówce. Nauczyciel może zaplanować wtedy zajęcia, podczas których będzie ćwiczył najsłabiej opanowane umiejętności. Po ocenieniu pracy samodzielnej ucznia nauczyciel powinien dokonać wnikliwej analizy **popęlnionych przez uczniów błędów** oraz wskazać ich źródła.

Niezmiernie ważnym elementem oceniania jest **konsekwencja w stawianiu wymagań**. Jeśli zadajemy pracę domową, starajmy się ją sprawdzać. Bardzo ważna jest: **rytmiczność oceniania i jasne reguły oceniania**. Ocenianie różnorodnych prac uczniowskich pozwala nauczycielowi na kontrolowanie bieżących osiągnięć i wysiłków ucznia.

Osiągnięcie zamierzonych celów wiąże się również z **rozpoznawaniem możliwości, uzdolnień i ograniczeń** uczniów, poprzez m.in. zapewnienie

5. Procedury osiągnięcia celów edukacyjnych

i docenienie samodzielnej pracy ucznia na każdej lekcji oraz w domu, z uwzględnieniem czasu na indywidualne konsultacje.

Nauczyciel powinien **maksymalizować osiągnięcia ucznia**, tym samym uczeń będzie zwiększał zaufanie do swoich możliwości i bardziej mobilizował się do wysiłku. Naszym zamiarem jest też zwiększenie nacisku na **samodzielną pracę ucznia**. Poza tym musimy pamiętać, że uczeń ma prawo do błędów, ważne by nie bał się porażki. Zasadne jest **włączanie rodziców do pomocy** w pracy nad motywowaniem ich dzieci do wysiłku intelektualnego.

W swoim środowisku obserwujemy, że uczniowie oceniani są przede wszystkim za prace pisemne. Taki model oceniania czasami wynika z przyjętych założeń – brak egzaminu ustnego z matematyki. Nie możemy jednak zapominać, że realizujemy również cele i zadania szkoły. Na lekcjach matematyki uczeń powinien również nabywać umiejętności skutecznego porozumiewania się, prezentowania swojego stanowiska i obrony własnego zdania. Uważamy więc, że nauczyciel powinien zaplanować w swoim przedmiotowym systemie oceniania oceny za różne aktywności ucznia, w tym również za **wypowiedzi ustne**.

6. Uwagi ogólne o realizacji programu

Program zawiera hasła zawarte w podstawie programowej dla kształcenia w zakresie podstawowym oraz hasła zawarte w podstawie programowej dla kształcenia w zakresie rozszerzonym. Pomyślany jest zgodnie z zasadami spiralności, polegającymi na cyklicznym powtarzaniu i poszerzaniu materiału. Każdy następny dział pogłębia i utrwała informacje. W ten sposób poruszamy się stale w obrębie tych samych lub podobnych haseł programowych, rozszerzając i pogłębiając wiedzę z niższych etapów nauczania.

W zakresie podstawowym zaplanowaliśmy tematy, które możemy zrealizować w liceum w trybie $3 + 3 + 3$, w technikum czteroletnim jest to tryb $3 + 2 + 2 + 2$, dla zakresu rozszerzonego w liceum w trybie $4 + 5 + 5$.

Ponieważ w szkołach ponadgimnazjalnych (liceum, technikum) jest około 80% wszystkich uczących się, zdajemy sobie sprawę, że nie możemy wymagać od nich tego, czego można było wymagać od około 40% populacji sprzed 2002 roku. Obowiązkowy egzamin z matematyki będą zdawać wszyscy uczący się w szkołach typu liceum i technikum od 2010 roku. Dlatego akceptujemy ideę ograniczenia treści nauczania matematyki. Nasze spostrzeżenia dowodzą, że więcej czasu potrzebujemy na omówienie z uczniami każdego tematu. Podstawa programowa nie zawiera haseł „logika”, „teoria zbiorów”. My jednak uważamy, że tematykę związaną z tymi hasłami powinniśmy wprowadzić w zakresie podstawowym intuicyjnie, bez ujęcia abstrakcyjnego. Podobnie jest z wektorami. Wprowadzamy je już w klasie pierwszej

w zakresie podstawowym, ponieważ zachęcają nas do tego nauczyciele fizyki.

Omawiając własności funkcji, sygnalizujemy na poziomie rozszerzonym monotoniczność, różnowartościowość, parzystość, okresowość funkcji, mając świadomość, że takie hasła mogą nie pojawić się na maturze. Własności takie można jednak opisywać w różny sposób, niekoniecznie formalnie je definiując. W zakresie podstawowym planujemy też rozwiązywanie problemów wymagających wyjaśnienia i uzasadnienia. Zadaniem nauczyciela na lekcjach matematyki jest wprowadzanie ucznia w świat rozumowania, uczenie tworzenia informacji, budowania argumentów, rozwijanie umiejętności definiowania, nabywania sprawności naukowego myślenia, wykorzystywania wiedzy i umiejętności matematycznych. Cechą programu dla zakresu rozszerzonego jest wprowadzenie ucznia w krąg abstrakcyjnego myślenia, symboli, zależności, nabywanie umiejętności dowodzenia, czyli przechodzenia od założeń do wniosków, rozumienia dowodów matematycznych.

Zdajemy sobie sprawę, że przydział godzin dla kształcenia w zakresie rozszerzonym jest bardzo różny ($3 + 5 + 5$, $4 + 6 + 6$, $5 + 5 + 5$). Rozszerzanie tematyki realizowanej na lekcjach matematyki pozostawiamy nauczycielom, ponieważ tylko oni są w stanie ocenić, czy można i na ile rozszerzyć hasła programowe w klasie, w której uczą. Zależy to przecież od przydziału godzin, również tych z puli „dyrektorskiej”, poziomu zespołu, z którym pracuje nauczyciel, jego liczebności, ale również od motywacji ucznia do nauki.

6. Uwagi ogólne o realizacji programu

6.1. Przykładowy przydział godzin dla 3-letniego liceum

Lp.	Dział	Liczba godz. zakres podst.	Liczba godz. zakres rozsz.
Klasa 1			
1.	Zbiór liczb rzeczywistych i jego podzbiory. Działania w zbiorze liczb rzeczywistych	27	34
2.	Wektory	6	6
3.	Funkcja i jej własności	13	15
4.	Przekształcanie wykresów funkcji	4	7
5.	Funkcja liniowa	17	28
6.	Funkcja kwadratowa	18	25
7.	Trygonometria cz. 1.	10	10
	Godziny do dyspozycji nauczyciela	13	18
Klasa 2			
8.	Planimetria cz. 1.	11	15
9.	Wielomiany	18	26
10.	Wyrażenia wymierne	14	21
11.	Trygonometria cz. 2. Funkcje trygonometryczne	—	18
12.	Ciągi	16	21
13.	Funkcja wykładnicza i logarytmiczna	6	18
14.	Planimetria cz. 2.	18	26
15.	Geometria analityczna	10	18
	Godziny do dyspozycji nauczyciela	15	15
Klasa 3			
16.	Stereometria	25	30
17.	Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka	25	35
	Przygotowanie do matury	28	65

6.2. Przykładowy przydział godzin dla 4-letniego technikum

Lp.	Dział	Liczba godz. zakres podst.
Klasa 1		
1.	Zbiór liczb rzeczywistych i jego podzbiory. Działania w zbiorze liczb rzeczywistych	27
2.	Wektory	6
3.	Funkcja i jej własności	13
4.	Przekształcanie wykresów funkcji	4
5.	Funkcja liniowa	17
6.	Funkcja kwadratowa	18
7.	Trygonometria	8
	Godziny do dyspozycji nauczyciela	15
Klasa 2		
8.	Wielomiany	18
9.	Wyrażenia wymierne	14
10.	Planimetria cz. 1.	11
11.	Planimetria cz. 2.	18
	Godziny do dyspozycji nauczyciela	10
Klasa 3		
12.	Ciągi	16
13.	Funkcja wykładnicza	6
14.	Geometria analityczna	10
15.	Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka	25
	Godziny do dyspozycji nauczyciela	15 (klasy trzecie technikum mają miesięczne praktyki zawodowe)
Klasa 4		
16.	Stereometria	25
	Przygotowanie do matury	33 (klasy czwarte technikum mają miesięczne praktyki)

7. Bibliografia

1. Decker F. Walker, *Program i cele kształcenia*, WSiP, Warszawa 2000
2. Richard I. Arends, *Uczymy się nauczać*, WSiP, Warszawa 2002
3. Helena Siwek, *Dydaktyka matematyki. Teoria i zastosowania w matematyce szkolnej*, WSiP, Warszawa 2005
4. *Prace prof. dr Anny Zofii Krygowskiej*, w: *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki* pod red. Jerzego Żabowskiego, część I, Płock 2000
5. Allan C. Ornstein, Francis P. Hunkins, *Program szkolny. Założenia, zasady, problematyka*, WSiP, Warszawa 1998
6. Podstawa programowa – strona internetowa MEN
www.men.gov.pl/oswiata/biezace/biezace

